Author(s):	Laitinen, Maarit; Rantamäki, Heli; Joutsenlahti, Jorma
Title:	Puhutko matematiikkaa?
Main work:	Monilukutaito kaikki kaikessa
Editor(s):	Kaartinen, Tapani
Year:	2015
Pages:	132-154
ISBN:	978-951-44-9847-3
Publisher:	Tampereen yliopiston normaalikoulu
Discipline:	Educational sciences
School /Other Unit:	School of Education
Item Type:	Article in Compiled Work
Language:	fi
URN:	URN:NBN:fi:uta-201510012323

Maarit Laitinen, Heli Rantamäki & Jorma Joutsenlahti

PUHUTKO MATEMATIIKKAA?

Monilukutaitoa 1. luokan syksyn matematiikassa

Avainsanat: peruslaskutaidot, proseduraalinen ajattelu, strukturaalinen ajattelu, kielentäminen, monilukutaito

Tiivistelmä

Monilukutaito osana tulevaisuuden laaja-alaista osaamista haastaa laskemistoimintoja painottavan matematiikan opettamisen. Mitä voisi monilukutaito tarkoittaa 1. luokan syksyn matematiikassa? Artikkelissa kuvataan Solmu-ohjelmana tunnettua lähestymistapaa ja sen teoreettista taustaa yhtenä esimerkkinä opetuksesta, jossa keskeisessä roolissa on lukukäsitteen muodostumisen tukeminen. Artikkelissa kuvataan myös joitakin ensimmäisen luokan alkusyksyn harjoituksia, joiden avulla opettaja voi tukea oppilaan ymmärryksen kasvua siitä, mitä luvut ovat ja mitä niillä voi tehdä.

Johdanto

Opetussuunnitelman perusteet (2014) määrittelee monilukutaidon (*multiliteracy*) osana tulevaisuuden laaja-alaista osaamista. Monilukutaidolla tarkoitetaan sen mukaan erilaisten viestien tulkinnan ja tuottamisen taitoja. Laaja-alaisen tekstikäsityksen mukaan tekstit voivat olla paitsi puhuttuja tai kirjoitettuja myös numeerisia, kuviollisia, kaavallisia, auditiivisia ja kinesteettisiä tekstejä. (Perusopetuksen perusteluonnokset 2014).

Jokaisella tiedepohjaisella oppiaineella on oma käsitejärjestelmänsä ja kielensä. Monilukutaidon tavoitteena on, että koulutuksen myötä oppilas kasvaa arkikielen hallinnasta kohti tiedonalojen kielen hallintaa (Luukka 2014; Viiri 2014). Opettajan tehtävänä on tuntea oppiaineen sisältö niin hyvin, että hän voi auttaa oppilasta käsitejärjestelmien rakentamisessa. Käsitejärjestelmistä syntyvien rakenteiden varassa asioita voi käsitellä ja pyrkiä ymmärtämään paremmin (Luukka 2014). Monilukutaito yhdistää ajatteluun ja oppimiseen kielitiedon lisäksi kaikki itseilmaisun muodot: lukemisen, kirjoittamisen, puhumisen, kuuntelemisen, piirtämisen ja katsomisen.

Pohtiminen johtaa parempaan oppimiseen. Ajatusten jäsentämisen kannalta on tärkeää päästä puhumaan ja perustelemaan omia käsityksiä (Joutsenlahti & Rättyä 2015). Keskustelujen kautta voi myös päätyä omien käsitysten muuttumiseen. Kasvaakseen monilukutaitoiseksi on oppilaalla oltava tilaa osallistua oppimis-opetusprosessiin (Rasku-Puttonen 2014).

Matematiikan tekstit ensimmäisellä luokalla ovat pääasiassa lukuja ja laskutoimituksia. Minna-Riitta Luukan seminaariesitystä (12.4.2014) soveltaen voisi monilukutaito ensimmäisen luokan syksyn matematiikassa merkitä yksinkertaistettuna sen pohtimista, mitä luvut ovat ja mitä niillä voi tehdä. Toisin sanoen tutkitaan luvun käsitettä (vrt. esim. Gelman & Gallistel 1986). Tällöin pohdittavaksi nousee, miten lukuja luokassa tuotetaan? Miten niitä tulkitaan? Miten niille luodaan merkityksiä?

Artikkelissa kuvaamme *Solmu-ohjelmana* tunnetun harjoitusohjelman teoreettisia lähtökohtia ja kuvaamme joitakin ensimmäisen luokan alkusyksyn harjoituksia yhtenä esimerkkinä monilukutaidon kehittämisestä 1. luokan syksyn matematiikassa. Ohjelmassa visualisoinnilla on keskeinen osa. Solmu-ohjelmaa on kehitetty Tampereen kaupungin Solmu-projektissa 2011–2013 jolloin tuettiin tuen tarpeessa olleiden oppilaiden matematiikan oppimisprosessia yksilöllisesti. Saatujen myönteisten kokemusten kannustamana lähestymistapaa kokeillaan Luma-Suomi 2014–2019 kehittämisohjelmassa koko luokan opetustapana Tampereen Normaalikoulun 1 b -luokalla ja Hämeenlinnassa Nummen koulussa 1 a -luokalla. Opetuskokeiluissa toteutettava lähestymistapa pohjautuu luokanopettaja (KM) Maarit Laitisen jatko-opintoihin liittyvään tutkimukseen.

Teoriatausta

Arkikielessä puhumme luvuista usein ikään kuin ne olisivat todellisia ja voisimme koskettaa niitä tai pitää niitä kädessä. Luvun käsite on kuitenkin abstrakti. Lukuja ei voi nähdä tai koskettaa, ainoastaan niiden representaatiot ovat aistein havaittavissa. Matematiikan tekstit ovatkin haasteellisempia kuin monien muiden aineiden tekstit (Luukka 2014). Matemaattiseen kyvykkyyteen tuntuu liittyvän kyky nähdä abstrakteja objekteja ”sielun silmin” (Sfard 1991).

Pystyäksemme oppilaidemme kanssa avaamaan matematiikan haasteellisia tekstejä, on meidän opettajien tunnettava nuo tekstit – ja pystyttävä myös huomioimaan niiden erityislaatuisuus opetuksessamme. Tämä johtaa pohtimaan matemaattisen tiedon luonnetta ja sitä mitä meidän tulisi siitä opettaa.

Perinteisesti oppilaan matemaattisen ymmärryksen kasvua tarkastellaan toisaalta **käsitetiedon (konseptuaalinen tieto)** lisääntymisenä ja toisaalta **menetelmätiedon (proseduraalinen tieto)** oppimisena (Hiebert & Lefevre 1986; Silfverberg 1999, 65). Käsitetiedon karttumisella tarkoitetaan monilukutaidossakin painotettavien tiedonalueen käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien eli käsitesuhteiden oppimista ja sitä kautta tapahtuvien tietorakenteiden kehittymistä (esimerkiksi luonnollisen luvun käsite ja kymmenjärjestelmä). Menetelmätiedon lisääntymisellä tarkoitetaan vastaavasti erilaisten toimintojen ja taitojen (esimerkiksi laskutoimitusten) oppimista.

Matematiikan syvällinen ymmärtäminen edellyttää menetelmätiedon ja käsitetiedon yhdistymistä (ks. Haapasalo 2003). Ratkaisematon pedagoginen ongelma matematiikan oppimisessa ja opettamisessa tuntuu kuitenkin olevan niiden jääminen irrallisiksi. Perinteinen näkemys on ollut, että laskurutiinien riittävä toistaminen luo pohjaa käsitteenmuodostukselle ja sitä kautta ymmärrykselle. Opetuksessa on painottunut arvioitavissa oleva menetelmätieto. Nykyisin vahvistuva näkemys rakentuu käsitteenmuodostuksen ja laskemistoimintojen rinnakkaiselle vahvistamiselle (Solmu-ohjelma).

Tutkijat ovat käsitelleet matemaattisten käsitteiden ja käsitejärjestelmien oppimista ja pyrkineet konstruoimaan teorioita siitä, miten yksilön matemaattinen ymmärrys rakentuu. (Sfard 1991,1994; Gray & Tall 1994, 2001). Solmu-ohjelman yhtenä keskeisenä teoreettisena viitekehyksenä on matematiikan käsitteiden duaalista luonnetta painottavat teoriat.

Anna Sfard (1991) kuvaa teoriassaan matemaattisen ymmärryksen kasvua käsitteellisenä muutosprosessina. Objektiivisen käsitteen (concept) sijaan hän puhuukin subjektiivisista ”käsityksistä” tai ”näkemyksistä” (conceptions). Sfardin mukaan matematiikan käsitteet, kuten **luonnollinen luku**, voidaan käsittää hierarkisesti eri tasoilla, proseduraalisesti prosessina ja strukturaalisesti objektina. Käsitetiedon ja menetelmätiedon erillisyyden sijaan Sfard tuo painokkaasti esille niiden toisiaan täydentävää luonnetta. Hän kuvaa proseduraalisia ja strukturaalisia näkemyksiä saman asian erottamattomina ja kuitenkin dramaattisesti erilaisina puolina. Molempia tarvitaan matemaattisessa ongelmanratkaisussa ja oppimisessa kuin kävelemisessä vasenta ja oikeaa jalkaa (Sfard 1991,9).

Proseduraalinen näkemys merkitsee käsitteen ymmärtämistä prosessina. Se on Sfardin mukaan matemaattisen ymmärryksen ensimmäinen ja alin hierarkiataso. Esimerkiksi luonnollinen luku voidaan ajatella proseduraalisesti siten, että seuraava luku saadaan, kun edelliseen lukuun lisätään yksi ja että tätä voidaan jatkaa loputtomasti (luvun ordinaalinen luonne). Harjoittelun ja käsitteellä toimimisen kautta käsite alkaa "tiivistyä". Yhteydet lähikäsitteisiin tulevat näkyviksi ja yleistäminen tulee mahdolliseksi. Reifikaatio merkitsee vapaasti suomennettuna "uudelleenmuodostumista". Sfard kuvaa reifikaation käsitteenmuodostuksen viimeiseksi vaiheeksi, jolloin entuudestaan tuttu käsite nähdään äkkiä kuin uudessa valossa, kokonaisuutena. Ajatteleminen tiivistyy ajatukseksi, prosessi objektiksi. Luonnollisen luvun strukturaalinen ymmärtäminen merkitsee, että luku alkaa edustaa tiettyä lukumäärää: esimerkiksi luku 5 edustaa kaikkia niitä olioita joita on 5 kappaletta (luvun kardinaalinen olemus). Proseduraalisen ymmärryksen taso on lähellä aritmeettista yhtä suuruuden tulkintaa, jossa "=" -merkki merkitsee merkkiä, jonka jälkeen tulee vastaus. Strukturaalisella tasolla yhtäsuuruus tulee ymmärrettäväksi yhtä suuruutena, jossa "=" -merkin molemmilla puolilla on yhtä monta (algebrallinen yhtäsuuruus). (Sfard 1991).

Proseduraalinen ja strukturaalinen ajattelu ovat laadullisesti hyvin erilaisia ajattelutapoja. Strukturaalinen ajattelu on merkittävästi proseduraalista ajattelua abstraktimpaa (Sfard 1991). Suurin ero proseduraalisen ja strukturaalisen ajattelun välillä on Sfardin mukaan kuitenkin ontolognen ja liittyy niiden olemisen tapaan: siinä missä proseduraalinen ajattelu on potentiaalista (esimerkiksi luettelija ei luetellessaan tiedä mihin lukuun luetteleminen tulee päättymään) merkitsee aktuaalinen strukturaalinen käsitteen ymmärrys kykyä tunnistaa monestakin yksityiskohdasta koostuva kohde "yhdellä silmäyksellä" kokonaisuutena, objektina. Sfardin mukaan strukturaaliseen ajatteluun liittyykin vahvasti luottamus omaan osaamiseen ja hallinnan tunne. (Sfard 1991).

Kyvykkyytemme tuottaa proseduraalisia ja strukturaalisia käsityksiä vaikuttaa ymmärryksen laatuun, jota voimme matematiikassa saavuttaa. Proseduraalinen ajattelu yksin ei matematiikassa riitä. Se on Sfardin mukaan pikemminkin ymmärryksen perusta kuin sen tuote.

Matematiikan syvällinen ymmärtäminen vaatii kykyä nähdä luvut sekä prosessina että objektina. (Sfard 1991,5).

Sfardin teoria kuvaa matemaattisen ymmärryksen kasvun vaiheittaisena yhä laajentuvaan ymmärrykseen johtavana prosessina, jossa matemaattiset käsitteet alkavat vähitellen muodostaa rakennelmaa, jossa edellisen, alemman abstraktiotason käsitteen strukturoituminen muodostuu edellytykseksi seuraavan tason laajemmalle ja kehittyneemmälle näkemykselle. ”Tässä piilee myös vaara. Linkin katketessa matemaattista systeemiä voidaan alkaa opetella teoreettisena merkkipelinä ilman tulkinnallista yhteyttä alemman tason struktuureihin. Sfard kutsuu tällä tavalla syntyvää näkemystä pseudostrukturaaliseksi; oppija oppii merkkejä ilman merkitystä”. (Silfverberg 1999, 60; Sfard 1994). Juuri siirtymät proseduraalisesta ajattelusta strukturaaliseen muodostuvat matematiikassa usein oppimisen epäjatkuvuuskohdiksi. (Merenluoto & Pehkonen 2004).

Gray & Tall (1994, 2001) ovat tutkineet lukukäsitteen kehittymistä ja siihen liittyvää prosessia aritmetiikassa. Myös he tuovat esille matematiikan symboliseen merkintätapaan liittyvän haasteen matematiikan oppimisessa ja opettamisessa. Sama symbolimerkintä voi samaan aikaan merkitä sekä prosessia että tämän prosessin tulosta. Esimerkiksi yksinkertainen aritmeettinen lauseke (5 + 4) voidaan nähdä yhteenlaskualgoritmina (lisää lukuun 5 neljä) ja toisaalta suoraan summan käsitteenä (5 ja 4 on 9). Tätä menetelmätiedon ja käsitetiedon duaalia yhteyttä korostaakseen Gray & Tall (1994) loivat käsitteen *pro*cept, missä sanan alkuosa tulee sanasta prosessi ja loppuosa sanasta concept, käsite. Procept voi merkitä samaan aikaan mentaalista objektia, siihen liittyvää prosessia, prosessin tulosta tai joitakin tähän objektiin liittyviä riippuvuuksia (Gray & Tall 1993). He huomauttavat (1994), että menetelmätiedon ja käsitetiedon linkittymiseen ei liity niin suura ongelmaa ennen formaalin koulumatematiikan alkamista, mitä pyritään joissakin suuntauksissa (realistinen matematiikka) myös huomioimaan.

Gray & Tallin (1994) mukaan *luvun procept* on kyseessä, kun oppilas ymmärtää luvun sekä prosessina (1,2,3) että käsitteenä (luku 3) (vrt. edellä reifikoitunut kardinaalinen luku Sfard, 1991). Tutkiessaan laskustrategioiden luokkia Gray & Tall havaitsivat, että lapsi, joka laskee yhteenlaskuja (esim. 3 + 2) alkeellisella kaiken luettelemisen ”count all” -strategialla toteuttaa laskiessaan itse asiassa kolme erillistä ala-proseduuria: ensin hän laskee toisen ryhmän lukumäärän nostamalla esimerkiksi yksitellen kolme sormea pystyyn toisesta kädestä (1,2,3), sitten laskemalla toisen ryhmän samoin nostamalla toisesta kädestä yksitellen kaksi sormea pystyyn (1,2) ja vielä kolmannen yhdistämällä lopuksi ryhmät laskemalla kaikki sormet alusta (1,2,3,4,5). Laskemisproseduuri (3 + 2) ja sen produkti (5) jäävät oppilaan mielessä erillisiksi pikemmin kuin että hän yhdistäisi ne opituksi faktaksi (3 + 2 = 5).

”Count on” – strategiaa pidetään kehittyneempänä laskustrategiana (mm. Clements & Sarama 2009). Siinä ensimmäinen luku käsitetään ”kokonaisuutena”, proceptina, ja vain toinen luku tulkitaan luettelemisen proseduurina. Gray & Tall huomauttavat, että tämä tapa on itse asiassa sofistikoitunut kaksoisluettelemisen proseduuri jossa (3 + 2) merkitsee luettelemista (4,5) mutta jossa lapsen on samalla pidettävä lukua myös siitä, kuinka monta lukua on laskettu. Tässä ensimmäinen luku on procept mutta toinen vielä proseduuri (eli laskemista). Gray & Tallin mukaan ”count on” – strategiaan liittyvällä proseduurilla on kaksi vaihtoehtoista lopputulosta. Yhteenlaskun proseduuri on kyseessä, kun ”count on”-strategiassa selvästi tiivistetään ”count all” -strategia lyhyempään proseduuriin. Lapsi ei välttämättä yhdistä proseduuria ja sen tulosta muotoon, joka muistettaisiin opittuna faktana. Gray & Tall toteavat, että jotkut lapset – joilla usein on vain muutama opittu fakta – tulevat niin tehokkaaksi luettelemisessa, että käyttävät sitä universaalina laskutapana luottamatta muistettuihin faktoihin. Toisaalta ”count on” -proseduuri voi tuottaa myös tuloksen, jossa tulos nähdään sekä prosessina että luvun käsitteenä. Merkintä (3 + 2) nähdään nyt edustavan sekä yhteenlaskun prosessia että prosessin tuotosta, summaa.

Kuitenkin vasta kun yhteenlaskettavat luvut ja niiden summa voidaan pitää *samanaikaisesti mielessä,* tuloksena on *merkityksellinen fakta,* joka voidaan nähdä joustavana proceptin ja proceptin yhdistelmänä, joka tuottaa *proceptin*. Ulkoa opitun ja merkityksellisen faktan eroa voi olla vaikea todeta yksittäisissä tapauksissa. Laajemmassa yhteydessä niiden ero tulee selvästi esille. Näveri (2009) määrittelee, että ulkoa opitun muistinvaraisen (rutiininomaisen) laskemisen vastakohta ei olekaan soveltaminen, vaan ymmärtävä automatisoitunut laskeminen. Gray & Tallin mukaan merkityksellisellä tavalla opittu fakta (procept) voidaan nähdä linkittyneenä muihin opittuihin faktoihin joustavalla tavalla. Harjoittelun myötä lukuun 5 liittyä ymmärryksen alue laajenee ja luku 5 voidaan nähdä myös lausekkeina (3 + 2) tai (2 + 3) ja jos ”3 ja joku luku on yhteensä 5, niin tuon jonkin täytyy olla 2”. Merkityksellisellä tavalla opitut faktat johtavat myös ”johdettuihin” faktoihin. Lapsi pystyy päättelemään apulaskujen avulla esimerkiksi kuinka paljon on 4 + 5. ”Koska 4 ja 4 on 8, niin 4 ja 5 täytyy olla yksi enemmän, siis 9”. Lapsen käyttämä kieli osoittaa, että hän pystyy joustavasti osittamaan ja kokoamaan lukuja. Laskujen muistaminen ”ulkoa” ei välttämättä johda päättelemiseen pystymiseen. Proceptuaalinen näkökulma on niin kietoutunut vähennyslaskuun, että vähennyslaskufaktat ovat helposti liitettävissä vastaaviin yhteenlaskufaktoihin. (Gray & Tall 1994; Gray & Tall 2001).

Proceptin merkitys aritmetiikassa on siihen liittyvässä joustavuudessa. Procept sallii ajattelun ”eri suuntiin” ja ongelmanratkaisussa tehokkaimman ratkaisuun johtavan reitin valitsemisen. Näveri (2009) liittääkin proceptiin abduktiivisen ”taaksepäin” ajattelun. Näin procept saa merkityksen luovuuden raaka-aineena.

Proseduraalinen ajattelu on sen sijaan joustamatonta (Gray & Tall 1994). Proseduraalisen ajattelun ja yksi yksikkö kerrallaan luettelemalla laskemisen varassa myös aritmeettisten periaatteiden oppiminen saattaa olla haasteellista. Esimerkiksi yhteenlaskun vaihdannaisuus voi olla hämmentävä oppilaalle, jolle proseduraalisen ymmärryksen varassa yhteenlaskulausekkeet 1 + 4 ja 4 + 1 merkitsevät eri asioita. Ensimmäisessä askeleita otetaan 4, toisessa vain 1. Kuinka niin on kyse samasta? Opettajille on tuttua, että juuri työläimmin yhteenlaskuja luettelevat oppilaat eivät ala hyödyntää vaihdannaisuutta yhteenlaskuissa, vaan että he sisukkaasti aloittavat luettelemisen aina alusta. Tämä on todettu tutkimuksissakin (kts. esim. Geary 2004,151). Räsänen ja Rusanen (2011) ovat esittäneet, että vaihdannaisuuden osaamattomuutta voitaisiin käyttää matematiikan oppimisvaikeuden identifiointityökaluna.

O*ppilaan kokemus* matematiikasta muodostuu erilaiseksi sen mukaan, miten hän onnistuu saavuttamaan strukturaalisia näkemyksiä. Proceptuaalisen ajattelun varassa oppilas pystyy abstrahoimaan matemaattisia periaatteita kokemuksistaan aritmetiikassa ja rakentamaan tehokkaita struktuureita. Tehokkaaseen struktuuriin liittyy myös tehokkaat laskustrategiat. Joustamattoman proseduraalisen ajattelun varassa käsitteiden välisten yhteyksien näkeminen on vaikeaa ja oppilas tukeutuu alkeellisiin laskustrategioihin. Kokemus matematiikasta muodostuu työlääksi ja raskaaksi. (Gray & Tall 1994).

Käsitys matematiikasta ja itsestä sen oppijana muodostuu varhain. Ei ole yhdentekevää, miten onnistumme tukemaan oppilaitamme strukturaalisten käsitysten ja tietorakenteiden rakentamisessa. Opetuksessa on tärkeää tuoda esille matematiikan käsitteiden niin proseduraaliset kuin strukturaaliset puolet (Haapasalo 2004).

Solmu-ohjelmasta

Solmu-ohjelma on syntynyt intensiivisen ja tiheän havainnoinnin tuloksena opetettaessa (Maarit Laitinen) 1.–3. -luokkien oppilaita, joilla oli vaikeutta oppia matematiikkaa. Oppilaat laskivat mekaanisella luettelemalla laskemisen laskustrategialla lähes kaikki yhteen- ja vähennyslaskut lukualueella 0-20 ja / tai heillä oli puutteita lukujen määrällisessä ymmärtämisessä ja lukujonotaidoissa. Olisiko sujuvan ja joustavan ajattelun tukemiseksi luvut ja laskutoimitukset – alueella tehokkaampaa ja oppilaan kannalta mielekkäämpää lähestymistapaa kuin luettelemalla laskemisen tehostaminen?

Solmu-ohjelmassa sujuvaa ja joustavaa peruslaskutaitoa tuetaan vahvistamalla luvun käsitteen muodostumista (procept). Ohjelmassa panostetaan käsitteelliseen ymmärtämiseen oppimisprosessin alusta asti. Oppilaat johdatellaan yhteen- ja vähennyslaskuun lukujen ja laskutoimitusten välisten yhteyksien tutkimisen kautta. Menetelmätiedon ja käsitetiedon yhdistymistä tuetaan vahvistamalla strukturaalista näkemystä luvuista ja laskutoimituksista.

Solmu-ohjelmassa luvut tehdään nähtäviksi, kuultaviksi ja kosketeltaviksi matematiikan neljän kielen kautta. Opetus jäsennetään Joutsenlahden ja Kuljun (2014) luokkahuonediskurssiin tuoman neljän kielen mallilla, jonka muodostavat matematiikan symbolikieli, toiminnan kieli, kuviokieli ja luonnollinen kieli. Mallissa koodinvaihtoa eri kielten välillä käytetään apuna luomassa merkityksiä luvuille. Tavoite on näin lisätä oppilaan käsitteellistä ymmärrystä luvuista ja laskutoimituksista. (Kts. myös Jousenlahti 2003; Joutsenlahti & Rättyä 2010). Aluksi voidaan merkityksiä luoda toiminnan kielen, kuviokielen ja luonnollisen kautta ja linkittää syntyneitä merkityksiä symbolikieleen. Myöhemmin lähtökohtana voi toimia mikä tahansa kielistä. Solmuohjelmassa malliin liitetään proseduraalisen ja strukturaalisen ajattelun tasot.

Lukumääräisyyden taju (number sense) on viimeaikaisen tutkimuksen mukaan matemaattisen kehittymisen perusta (Mazzocco, Feigenson, & Halberda, 2011). Lukumäärien likimääräisen hahmottamisen tuoma kokemus lukumääristä muodostaa perustan, jonka varassa ymmärretään numerosymbolien merkitykset (Geary 2013). Solmuohjelman toimintamateriaalit [1]mm. lukusabluunat (kuva 1) ja lukumääräpalat (kuva 2) suuntaavat oppilaiden huomion lukumääriin. Lukumääräisyydentajuun liittyvällä subitisaatiolla tarkoitetaan kykyä tunnistaa pieniä lukumääriä (1-4) yhdellä silmäyksellä ilman laskemista (Clements & Sarama 2009). Solmu-ohjelman toimintamateriaaleissa lukumäärät on ryhmitelty subitisaation avulla ”yhdellä silmäyksellä” kokonaisuuksina hahmottuviksi lukukuvioiksi. Solmu-materiaaleissa tätä myös laajennetaan. Toiminnan kieli ja toiminnan tuloksena syntyvä kuviokieli on Solmu-materiaaleissa synkronoitu tukemaan struk-

1 Keksintösäätiö on rahoittanut lukumääräpalojen tuotekehitystä sekä hyödyllisyysmallisuojauksen Suomessa.

turaalisia näkemyksiä. Myös luonnollisella kielellä pyritään tuomaan esille käsitteiden proseduraaliset ja strukturaaliset puolet.

Solmu-ohjelman yhteen - ja vähennyslaskua valmistavissa harjoituksissa vahvistetaan luvun kardinaalista ymmärtämistä. Oppilas esimerkiksi ensin piirtää lukumääräsabluunan avulla lukumärän (4) yksi pallo kerrallaan samalla luettelemalla palloja laskien päätyen lukuun 4 (prosessi 1,2,3,4). Harjoitusta jatketaan ohjaamalla oppilaan huomio luettelemisen lopputuloksena syntyneeseen strukturoituun lukumääräkuvioon esimerkiksi tutkimalla, miltä syntynyt lukukuvio näyttää. Kuinka monella eri tavalla oppilas voi piirtää lukumäärän 4? Menetelmätiedon ja käsitetiedon linkittymistä vahvistetaan myös tutkimalla lukumäärien jonon rakentumista. Miten esimerkiksi lukumäärä 4 rakentuu lukumäärien jonossa? Tavoitteena on varmistaa lukujonontaitojen viimeinen vaihe, jolloin oppilas ymmärtää lukujonon myös lukumäärien jonona (luvun ordinaalinen ja kardinaalinen olemus vrt. Sfard 1991).

Sfardin (1991) mukaan visualisointi tukee strukturaalisia käsityksiä. Yhteenlaskuja lukumääräpaloilla laskiessaan oppilas yhdistää kokonaisista lukumääräkuvioista (kardinaalinen luku) uusia lukukuvioita, jotka hän voi tunnistaa yhdellä silmäyksellä. Solmu-materiaaleilla työskentely keventää työmuistitaakkaa, kun yhteenlaskettavat lukumäärät ja summa ovat nähtävissä samanaikaisesti. (Vrt. Gray & Tall 1994). Oppilasta pyydetään osoittamaan yhteenlaskulausekkeen ja vastauksen yhtäsuuruus. Oppilas vakuuttaa tämän itselle (ja muille keskusteluun osallistujille) kuviokielellä lukumääräpalojen avulla. Esimerkiksi lausekkeen (3 + 2) proseduraalinen ymmärtäminen toimintaohjeena lisätä lukuun 3 luku 2 tulee lukumääräpalojen avulla ymmärrettäväksi staattisena summanimenä (3 + 2), joka on 5.

Solmu-ohjelmassa koodinvaihto kuviokielestä symbolikieleen tapahtuu strukturoidusta lukukuviosta. Tämä mahdollistaa myös yhtäsuuruusmerkin tutkimisen jo varhaisessa vaiheessa merkkinä, jonka molemmilla puolilla on yhtä monta (algebrallinen yhtä suuruus). Luku on yhtäsuuruusmerkin toisella puolella ”lempinimellään” summanimenä. Lukumääräpaloilla työskentely ohjaa oppilasta löytämään objektijoukon määrällisten suhteiden kautta numeeristen merkintöjen, kuten 5 = 3 + 2 (= 4 + 1,   = 1 + 4, = 2 + 3), pätevät tarkoitteet.

Solmu-ohjelmassa matematiikan keskeiset periaatteet (osa- kokonaisuus, yhteenlaskun vaihdannaisuus, yhteen- ja vähennyslaskun käänteisyys) opitaan pienellä lukualueella, joilla subitisaatio tukee luvun kardinaalista ymmärtämistä. Lukumääräpaloilla konkreettinen lukujen rakentelu ja osittaminen tukevat osa-kokonaisuuden periaatteen oivaltamista. Osa- kokonaisuuden oivaltaminen tukee vähennyslaskun oppimista (Vrt. Gray & Tall 1994). Se on myös ensimmäinen askel kohti multiplikatiivista ajattelua, jota tarvitaan jo ensimmäisen luokan matematiikassa, kun oppilaan on ymmärrettävä luku 10 uutena yksikkönä (Clements & Sarama 2009).

Solmu-ohjelman taustana olevan sosiokonstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisesti vuorovaikutuksella on oppimis-opettamistapahtumassa tärkeä rooli. Solmuvälineiden on tarkoitus tarjota opettajalle välineet, joiden avulla hän voi synnyttää luokassa lukumääriin ja niiden välisten suhteisiin liittyvää keskustelua. Visuaalisten havaintojen pohjalta ja erilaisten ratkaisujen etsimisen kautta synnytetään luokkaan ensimmäisistä matematiikan tunneista asti kulttuuria, jossa yhden oikean vastauksen sijaan arvokkaaksi nousee useiden erilaisten ratkaisujen etsiminen ja omista havainnosta ja käsityksistä kertominen. Opettajan tehtävänä on seurata, miten oppilas ajattelee laskiessaan ja auttaa häntä tulemaan tietoiseksi omasta ajattelustaan. Opettaja myös haastaa oppilasta käsitteellisesti ymmärryksen tason nostamiseksi. Lukujen visualisointi mahdollistaa sen, että kaikki oppilaat pääsevät osallistumaan luokkahuonekeskusteluun ja yhteisen ymmärryksen rakentamiseen siitä, mitä luvut ovat ja mitä niillä voi tehdä.

Solmu-ohjelmaan liittyvässä tutkimuksessa 1. luokan syksyn alkukartoituksessa (Lukumat-matematiikka) persentiiliarvon 10–15 saaneet oppilaat ovat saaneet kolme kertaa viikossa 15–20 min (45–60min/viikko) yksilöllistä Solmu-tukea syyskuun alusta alkaen 8–10 viikon jakson. Luokassa on opetettu Solmu-ohjelman periaatteilla. Tutkimuksen ensimmäisessä syklissä tehtyjen havaintojen pohjalta vaikuttaa siltä, että myös heikon lukukäsitteen varassa yhteen-ja vähennyslaskun opiskelun aloittaneet oppilaat pystyvät osallistumaan keskusteluun luvuista ja niiden määrällisistä suhteista Solmu-materiaalien avulla. Ymmärryksen tason nouseminen on näkynyt mm. nopeasti vahvistuneena hallinnan tunteena ja siten, että oppilaat ovat alkaneet tulkita yhteenlaskuyhtälöitä joustavasti (algebrallinen yhtäsuuruus) ja hyödyntää vaihdannaisuutta. Pääasiallisesti oppilaat laskevat osittamalla ja kokoamalla mutta osaavat myös huomattavan määrän ymmärrettyjä faktoja. Persentiiliarvon 10 syksyllä saanut oppilas on pystynyt kehittämään myös omia strategioita laskemiseen lukualueella 0–8. Kehitystutkimuksessa on tavoitteena laatia arviointityökalu oppilaan ymmärryksen tason (proseduraalinen/strukturaalinen) seuraamista ja oppimisprosessin ohjaamista varten (lukualue 0–20).

Kokemuksia matematiikan monilukutaidosta Solmu-ohjelmalla

Opetuskokeilussa on mukana Tampereen Normaalikoulun luokanlehtori Heli Rantamäki ja 1. b-luokan oppilaat. Kokeilu alkoi syksyn 2014 ensimmäisestä matematiikan oppitunnista, jolloin oppilaat aloittivat tutustumisen lukumääriin lukualueella 0–10. Oppilaita ohjattiin heti ensimmäisestä tunnista lähtien katsomaan lukumääriä ja rakentamaan lukuja lukualueella 0-10 strukturoidusti sormien ja kymppikehyksen avulla. Lukumäärien hahmottamista opeteltiin laskemalla itse (yhden- ja kahdenvälein) erilaisia pikkuesineitä kymppikehykseen. Heitä myös ohjattiin kertomaan, miten he hahmottivat luvun sormista tai kymppikehyksestä ilman yksitellen luettelemalla laskemista. Oppilaat tuottivat muun muassa seuraavanlaisia havaintoja: ”Mä näin viisi ja kolme ja tiesin, että se on kahdeksan.” Mä huomasin, että kaksi puuttuu kymmenestä.”

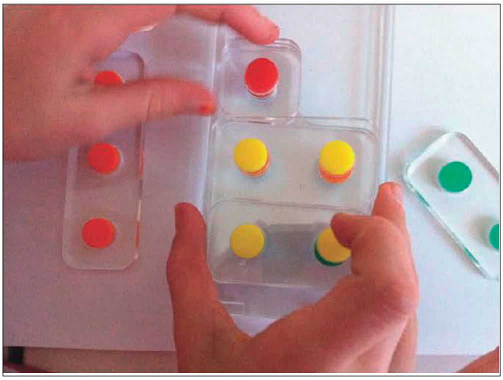
Luvut olivat aina näkyvissä luokan taululla lukujen jonon muodossa lukumäärinä. Oppilaiden kanssa vertailtiin lukuja lukumäärinä toisiinsa. Käsitteet ”yksi enemmän” ja ”yksi vähemmän” konkretisoituivat heille lukumääräpalojen avulla. Oppilaat oppivat havaitsemaan lukujen jonosta, mikä on yksi enemmän kuin esimerkiksi 3 ja he oppivat myös todistamaan vastauksensa lukumääräpalojen avulla. Kaikissa edellä kuvattuihin harjoituksiin liittyvissä keskusteluissa olennaista olikin nimenomaan se, että oppilaat oppivat vastaamaan kysymyksiin: ”Miten näit?”, ”Mistä tiesit, että?” tai ”Voitko vielä nähdä eri tavalla?”. Alusta lähtien oppilaita siis ohjattiin näkemään lukumääriä sekä myös ohjattiin ja rohkaistiin kertomaan ajattelustaan ja havainnoistaan. Havainto- ja toimintamateriaali mahdollistivat sen, että jokainen oppilas havaitsi ja näki jotain ja jokaisella oppilaalla oli näin ollen havaintoja, joita hän pystyi kuvaamaan luonnollisella kielellä. Kaikki pystyivät osallistumaan keskusteluun ja kokemaan onnistumisen elämyksiä. Havaintomateriaali myös auttoi opettajaa suuntaamaan oppilaiden huomion nimenomaan lukumääriin ja ohjaamaan keskustelua matemaattisiin havaintoihin.

Toiminnan kielestä kuviokieleksi ja oman ajattelun kielentämistä

Kuvaamme seuraavaksi tarkemmin harjoituksia, joita luokassa tehtiin alkusyksystä luvun 5 yhteydessä. Kun lukua 5 ryhdyttiin käsittelemään perusteellisemmin, oli se oppilaille jo lukumääränä tuttu sormista (vasemman käden kaikki sormet) sekä kymppikehyksestä (ylärivi täynnä tai vasen puoli täynnä). Lisäksi luku 5 oli jo rakennettu luokan taululle lukujen jonoon muodossa ”1 enemmän kuin 4”. Koska lukua 5 oli systemaattisesti harjoiteltu tunnistamaan lukukuviona, työskentely aloitettiin pohtimalla oppilaiden kanssa, näyttääkö luku 5 aina samalta kuin aiemmin tarkastellussa lukukuviossa. Kaikkien ollessa yhtä mieltä siitä, että muitakin mahdollisuuksia on, saivat oppilaat tehtäväkseen tutkia, miltä luku 5 oikein voi näyttää. Tutkimustehtävässä oppilaat käyttivät lukusabluunoita. Lukusabluunan avulla oppilaat piirsivät sabluunan ääriviivat näkyviin. Sen jälkeen he värittivät mahdollisimman monella eri tavalla lukumäärän 5 sabluunasta näkyviin. Tehtävä oli oppilaista mieluisaa puuhaa ja luokassa vallitsi innostunut tunnelma. ”Hei, tää näyttää ihan nopalta!” ”Tästä tuli niin kuin L.” Erilaisia ratkaisuja löytyi runsaasti. Jokainen oppilas tuntui myös saavan oivaltamisen ja itse keksimisen -kokemuksen. Kuvioiden valmistuttua oppilaat vertasivat keksimiään kuvioita parin kanssa. Parien tehtävänä oli selvittää, oliko heillä samanlaisia vai erilaisia ratkaisuja ja kumpia oli enemmän. Lopputulokseksi tuli, että erilaisia kuvioita oli merkittävästi enemmän. Tästä yhdessä oppilaiden kanssa pääteltiin, että luku 5 voi rakentua hyvin monin eri tavoin ja näyttää monenlaiselta. Havainnosta innostuneena oppilaat alkoivat etsiä luokasta lukua 5. He huomasivat esimerkiksi, että luokassa on viisi lamppua rivissä ja viisi kaappia tiskipöydän ympärillä, kolme yläpuolella ja kaksi alapuolella. Lukuja ja siis matematiikkaa oli todellakin kaikkialla luokassa. Tätä tehtävää olisikin helppo laajentaa ja jatkaa etsimällä lukua 5 myös koulun pihalta, kotoa ja lähiympäristöstä. Löydökset voisi esimerkiksi valokuvata ja koulussa yhdessä tutkia kuvioita ja sitä, miten kuvissa näkyy viisi.

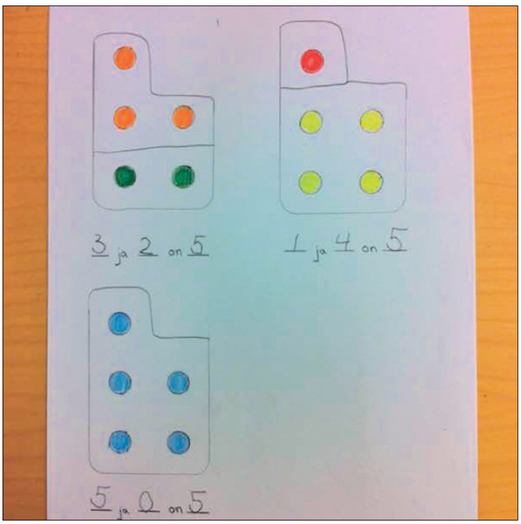
Kuva 1.
Tutkimuksia lukusabluunalla: Luettelemisesta lukumääräksi. *”Hei tästä tuli noppavitonen!”*

Kun oppilaat olivat piirtäneet ja tunnistaneet luvun 5 monella eri tavalla, oli aika vaihtaa ajattelun suuntaa. Luku 5 hajotettiin kahteen osaan ja tutkittiin sen eri ilmenemismuotoja (hajotelmia). Niitä kutsuttiin luvun lempinimiksi. Oppilaiden tehtävänä oli ratkaista, millä eri tavoilla luku 5 voidaan rakentaa kahta lukupalaa käyttäen. Laskeminen ei hajonnut luettelemiseksi. Oppilaat käsittelivät koko ajan konkreettisia lukumääriä. Oppilaat työskentelivät lukupalojen parissa erittäin motivoituneesti. Kaikki onnistuivat tehtävässä. Oppilaiden väliset taitoerot näkyivät selvästi. Osalle oppilaista oli selvää yhdellä vilkaisulla, mitkä palat kuuluvat yhteen. Jotkut oppilaat taas löysivät ratkaisut puhtaasti kokeilemalla yrittämisen ja erehtymisen kautta.



Kuva 2.
Lukumääräpaloilla uusia lukuja kokoamassa. ”4 ja 1 on yhdessä 5.” Entäpä ”On 5, pois 4. Kuinka monta jää?”

Kun oppilas oli oivaltanut, miten eri tavoin luku 5 voidaan koota, hän kirjasi rakentamansa ratkaisut piirtämällä matematiikan kuviokielellä ja kirjoittamalla matematiikan symbolikielellä eli numeroilla hajotelmaparit vihkoon.



Kuva 3.
Yhdellä silmäyksellä voi nähdä lukumäärän 5 monella eri tavalla. Ymmärryksen alue laajenee.

Tässä vaiheessa oppilaiden kanssa perehdyttiin myös vaihdannaisuuteen. Kokeilujen ja todistamisen kautta havaittiin, että ei ole väliä kummassa järjestyksessä lukupalat asetetaan alustalle esimerkiksi sekä 4 ja 1 että 1 ja 4 on 5. Tämä tuntui oppilaista täysin luontevalta ja ymmärrettävältä. Vaihdannaisuuden periaate on jäänyt luokassa elämään. Kun luokassa joku oppilas tuottaa esimerkiksi hajotelmaparin 5 ja 2, on toinen oppilas heti täydentämässä, että seitsemän voidaan sanoa myös 2 ja 5.

Kuviokielestä symbolikieleen

Liikkumista kielestä toiseen

Luonnollinen kieli, symbolikieli ja toiminnan kieli

Oppilaiden piirtämät kuvamallit hajotelmapareista toimivat inspiraationlähteenä jatkotyöskentelylle. Yksi oppilas vuorollaan sai tulla näyttämään dokumenttikameralla jonkun piirtämänsä hajotelmaparikuvion. Opettaja keksi kuvasta oppilaiden ratkaistavaksi esimerkiksi seuraavanlaisen tarinan: ”Mikolla on neljä autoa kotona ja yksi auto mummolassa. Kuinka monta autoa Mikolla on yhteensä?” Muutaman mallitarinan jälkeen oli oppilaiden vuoro tuottaa itse näyttämistään kuvamalleista laskutarinoita. Oppilaat innostuivat keksimään tarinoita ja abstraktit lukukuviomallit mahdollistivat hyvin monenlaiset laskutarinat. Kuvamallit houkuttelivat tuottamaan tarinoita, joissa kaksi joukkoa yhdistyy (eli ne tukivat strukturaalista käsitystä yhteenlaskusta, Solmu-ohjelma).

Oppilaat olivat hyvin motivoituneita keksimään ja ratkaisemaan laskutarinoita. Oppilaista oli mukavaa ujuttaa itsensä ja luokkakaverinsa mukaan tarinaan. Näin tarinat antoivat myös mahdollisuuden oppilaiden tutustua toisiinsa paremmin ja opettajan vahvistaa suhdetta oppilaisiinsa, kun tarinoihin saatiin mukaan oppilaiden harrastukset, lemmikit, kaverit ja perheenjäsenet.

Seuraavaksi laskutarinat opeteltiin muuttamaan matematiikan symbolikielelle yhteenlaskun muotoon. ”+”-merkki opittiin lukemaan ”on yhdessä”.. Kielen vaihto sujui oppilailta vaivattomasti. Symbolikielen oppiminen oli oppilaille helppoa. Oppilaita ohjattiin käyttämään alusta lähtien merkintätapoja 2+3=5 ja 5=2+3. Yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla on 5, toisella puolella se on lempinimellään.

Yhteenlaskun harjoittelua jatkettiin tämän jälkeen vielä oppikirjan tehtävillä, joissa kuvamallit olivat konkreettisia hahmoja ja ne mallinsivat selkeästi tilanteita, joissa jotakin tulekin lisää (eli ne tukivat proseduraalista käsitystä yhteenlaskusta). Yhteenlaskun osaamista syvennettiin lopuksi vielä niin, että oppilaita ohjattiin muuttamaan symbolikielellä merkitty lasku kuviokieleksi. Pelkistä kuvista ei kaikissa tapauksissa voinut päätellä, miten oppilas oli laskun kielentänyt. Keskustelut oppilaiden kanssa kuvia katsottaessa olivatkin erittäin tärkeitä. Niissä paljastui, että kuvien taustalla oli hienoja tarinoita sekä oivalluksia. Kirjallinen kielentäminen ei näin pienillä oppilailla ollut vielä varteenotettava vaihtoehto. Kirjoittaminen on luokassa korvattu piirtämisellä tai tarinoimisella. Tuokioista rakentui myös ongelmanratkaisutilanteita oppilaiden yhdessä ideoidessa laskuun sopivaa kuvitusta ja tarinaa.

Yhteenvetoa kokeilusta

Alkuopetusvuosina rakennetaan oppilaiden matematiikan taitojen pohjaa. Silloin vaikutetaan hänen käsitykseensä matematiikan luonteesta sekä myös hänen suhtautumiseen ja asenteisiin matematiikkaa kohtaan. Alkuopetusvuosina alkaa myös muodostua oppilaan näkemys itsestään matematiikan oppijana. Osaanko minä matematiikkaa? Millainen oppija minä olen? Onko minulla taitoja, joita matematiikassa tarvitaan ja arvostetaan? Arvostanko minä matematiikkaa? Merkityksellistä on, millaiseksi kokemukseksi matematiikan oppiminen muodostuu. Välittyykö lapselle kokemus onnistumisesta?

Alkuopetusvuosina oppilaiden matemaattinen ajattelu saattaa jäädä luokkatyöskentelyssä huomaamattomaksi niin kirjan perustehtäviä laskettaessa, päässälaskuissa kuin ongelmanratkaisupohdinnoissakin. Opettaja saattaa kielentää omaa matemaattista ajatteluaan, mutta oppilaiden rooliksi jää usein kuunteleminen ja laskeminen. Ensimmäisen luokan alun laskutehtävät saattavat vaikuttaa helpoilta ja itsestään selviltä ja niistä keskusteleminen saattaa tuntua tarpeettomalta. Toisaalta juuri itsestäänselvyyden tunne tekee keskustelusta opettajalle haastavaa ja ehkä myös siksi epämieluisaa. Mistä oikein oppilaiden kanssa pitäisi ja voisi keskustella matematiikassa?

Tampereen Normaalikoululla käytössä olleet havainto- ja toimintamateriaalit auttoivat opettajaa suuntaamaan oppilaiden havainnoinnin lukumääriin. Ne ohjasivat oppilaita katsomaan lukumääriä ja sitä kautta löytämään lukujen välisiä yhteyksiä. Materiaali auttoi oppilaita osakokonaisuuden oivaltamisessa. Luokan oppilaat eivät tukeutuneet laskemisessaan yksi sormi kerrallaan luettelemiseen. Materiaali auttoi oppilasta paitsi ymmärtämään lukuja myös kertomaan näkemästään ja ilmaisemaan oivalluksiaan ja matemaattisia ajatuksiaan. Oppilaiden katsomisen ja havaintojen tekemisen tapa muutti jo syksyn kuluessa muotoaan. Aluksi ensimmäisissä keskusteluissa oli mukana enemmän ei niin matemaattista ainesta kuten esimerkiksi värit. ” Mä nään punaisia ja keltaisia palloja kahdella muovialustalla.” Tietojen ja taitojen karttuessa myös keskustelu täsmentyi: Näen 3 punaista palloa ja yhden keltaisen pallon, näen kolme ja yksi on neljä, näen 3+1=4.

Opettajan ohjaus sekä hänen ja vertaisryhmän antama malli olivat materiaalin lisäksi keskeisessä osassa opeteltaessa keskustelemaan matemaattisista havainnoista. Lukumäärien näkeminen ja lukujen löytäminen lähiympäristöstä eivät olleet oppilaille itsestään selviä taitoja. Osa oppilaista tarvitsi siihen paljon opettajan ohjausta. Monet oppilaista tarvitsivat aluksi myös opettajan sanoittaman mallin, ennen kuin he pystyivät itsenäisesti kielentämään näkemäänsä. Oppilaat oppivat myös koko ajan toisiltaan, koska keskustelua ja yhdessä tekemistä oli paljon. Vaikka ratkaisuja ja tapoja nähdä ja hahmottaa oli useita, oli tärkeää, että koko ajan oppilaita ohjattiin oikeiden käsitteiden käyttöön. Itse ratkaisuja ei sen sijaan tuntityöskentelyssä arvotettu mitenkään. Jokaiseen ideaan pyrittiin suhtautumaan arvokkaana oivalluksena. Materiaali ja lähestymistapa auttoivat oppilaita tekemään omia oivalluksia. Opettajan roolina ei yhteisissä keskusteluissa ollut toimia niinkään tuomarina oikeiden ja väärien vastauksien erottamiseksi, vaan hänen tehtävänään oli innostua ja ilahtua oppilaiden ratkaisuista sekä ohjata oppilaita sanoittamaan havaintojaan täsmällisemmin matematiikan käsitteillä sekä muuttamaan havaintojaan matematiikan merkkikielelle.

Tuntityöskentelyssä painottui ongelmakeskeinen lähestymistapa. Opettaja esitti usein tunnin alussa ongelman, johon oppilaat toimintamateriaalin avulla etsivät ratkaisua/ratkaisuja. Alkusyksystä tehtäviä ei juurikaan tarvinnut eriyttää, koska lähestymistapa oli kaikille uusi. Ratkaisujen löytyminen edellytti etsimistä, kokeilemista, rakentelua tai piirtämistä. Työtapa tarjosi mekaanisestikin jo taitaville laskijoille sopivasti uutta oivallettavaa. Tekemisen kautta löydettiin matemaattisia periaatteita ikään kuin huomaamatta kuten esimerkiksi vaihdannaisuus yhteenlaskussa.

Normaalikoulun 1b-luokassa toteutettu työskentelytapa on ollut antoisaa mutta myös vaativaa. Se on vaatinut opettajalta hyvää valmistautumista oppitunteihin ja samalla myös epävarmuuden sietämisen oppimista. Omat haasteensa työskentelyyn on tullut siitä, ettei käytössä oleva oppikirja ole oikein tukenut toteutettua opetusta ja oppimista. Oppikirja tarjosi kyllä paljon yksitellen laskemista ja laskujen toistoa. Erilaisia tehtävätyyppejä oli runsaasti. Energia tuntui kuitenkin oppilailla pitkälti kuluvan sen ymmärtämiseen, mitä tehtävissä oli kulloinkin tarkoitus tehdä, ei niinkään lukujen välisien yhteyksien löytymiseen tai laskustrategioiden rakentumiseen. Koko syksyn ajan onkin oppimisen tueksi luokkaan tehty lisämateriaalia. Aikaa olisi myös saanut olla enemmän käytössä asioiden käsittelyyn. Ajan tunteen riittämättömyys korostui, koska aikaa kului 1-luokkalaisilla paljon ihan työskentelytaitojen opetteluun. Mitä suurimmassa määrin luokassa onkin syksyn aikana harjoiteltu paitsi omien ajatusten sanoittamista, myös oman vuoron odottamista, toisten sanottavan kuuntelemista ja kunnioittamista. Lukukäsityksen kehittyminen vaatii pitkäjänteistä ja systemaattista työskentelyä sekä aikaa oppilaiden omien havaintojen tekemiselle ja kuuntelemiselle. Tuntuukin hyvältä, että uudessa OPS-luonnoksessa painotetaan lukukäsitteen oppimista ja näin sille toivottavasti myös on mahdollista varata enemmän aikaa.

Luokan sisäisellä vuorovaikutuksen laadulla on merkitystä oppimiselle ja motivaatiolle. Ei ole yhdentekevää, miten puhumme toisillemme, miten suhtaudumme toistemme työskentelyyn ja millaista luokan toimintakulttuuria haluamme rakentaa. Kannustava ja keskusteleva ilmapiiri vahvistaa oppilaiden sitoutumista oppimiseen ja koulunkäyntiin. Normaalikoulun 1 b –luokassa syksyllä 2014 toteutetun Solmu-ohjelman tavoitteena on ensisijaisesti ollut vahvistaa oppilaan syvempää ymmärrystä luvuista ja laskutoimitukista ja niiden välisistä yhteyksistä. Osa oppilaista jää jo alkuopetuksessa vaeltamaan lukujen metsään, jossa kokonaisuus ei hahmotu, vaan luvut ja laskut tulevat vastaan luku luvulta. Havaintojemme mukaan näyttäsi, että voimme opetuksella vaikuttaa tähän kulkuun tukemalla systemaattisesti strukturaalisen näkemyksen muodostumista lukujen ja niiden määrällisten suhteiden yhteisen tutkimisen kautta. Näihin tavoitteisiin tähtäävä työskentely on samalla ollut myös tärkeänä tekijänä rakentamassa oppilaiden kokonaisvaltaista hyvinvointia ja koulutyöhön sitoutumista. Tuntuu, että sisällyttämällä monilukutaitoonkin liittyvät matematiikasta keskustelemisen, yhteisen pohtimisen ja tekemisen osaksi oppitunteja jo ensimmäisestä luokan alusta lähtien voimme tukea paitsi oppilaiden matematiikan taitojen ja ajattelun kehittymistä myös oppilaiden vuorovaikutustaitoja, osallisuuden tunteen vahvistumista sekä positiivisen itsetunnon kehittymistä.

Lähteet

Clements, D., & Sarama, J. (2009). Learning and teaching early math. The learning trajectories approach. New York, NY: Routledge.

Geary, D.C. (2004) Mathematics and learning disabilities. Journal of Learning Disabilities. Vol. 37(1), 4–15.

Geary, D.C. (2013) Early foundations for mathematics learning and their relations to learning disabilities. Current Directions in Psychological Science, 22(1), 23–27

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1986) The Child´s Understanding of Number. Massachusetts: Harvard University Press.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education 26(2), 115–141

Gray, E., & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. Proceedings of PME25. Utrecht. July 2001, 65–72.

Hiebert, J & Lefevre, P. (1986) Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (ed.) *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (ss. 1–27). New Jersey: LEA.

Haapasalo, L. (2003). The conflict betweewn conceptual and procedural knowledge: Should we need to understand in order to be able to do, or vice versa? Teoksessa L. Haapasalo & Sormunen (toim.) *Towards meaningful mathematics and science education. Proceedings on the IXX symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association*. Kasvatustieteiden tiedekunnan selosteita 86, 1–20.

Haapasalo, L. (2004). Pitäisikö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitäisikö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.*) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 50–83). Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti.

Knoll, J. (2005). Matematiikan taitojen kuntouttaminen – aritmeettisten faktojen automatisointi struktuuripohjaisen laskemisen avulla. NMI-bulletin 15 (1), (ss. 14–20)

Joutsenlahti, J. (2003). Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.) *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003.* Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:72 (ss. 188–196). Turku: Turun opettajankoulutuslaitos.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2010). Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. Teoksessa E. Ropo, H. Silfverberg & T. Soini (toim.) *Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat. Ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009.* Tampereen yliopiston opettajankoulutuslaitoksen julkaisuja. A 31 (ss. 77-89). Tampere: Tampereen yliopisto.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (201X). Kielentäminen matematiikan ja äidinkielen opetuksen kehittämisessä. Teoksessa XXXXXXX (toim.) Tämä julkaisu.

Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2014). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. rautiainen & M. Tarnanen (toim.) *Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.–14.2.2014. Ainedidaktisia tutkimuksia 8.* (ss. 45–62). Jyväskylä: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura.

Luukka, M.-R. (2014). Seminaariluento *Kielitietoinen koulu ja monilukutaitoinen oppilas*. 12.4.2014. Kieli-kampus. Jyväskylän yliopisto.

Lukimat-matematiikka. Niilo Mäki Instituutti. http://www.lukimat.fi/matematiikka/tietopalvelu/oppimisvaikeudet/matemaattisten-oppimisvaikeuksien-maarittely [Luettu 1.12.2014]

Mazzocco, M.M.M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). Preschoolers' precision of the approximate number system predicts later school mathematics performance. PLoS ONE, 6(9), 1–18

Merenluoto, K. & Pehkonen, E. (2004). Luokanopettajaksi opiskelevien matemaattinen osaaminen ja ymmärtäminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 414–434). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Opetushallitus (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden luonnos. http://www.oph.fi/ops2016/perusteluonnokset [Luettu 19.11.2014]

Näveri, L. (2009). *Aritmetiikasta algebraan. Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana*. Tutkimuksia 309. Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto.

Rasku-Puttonen, H. (2014). Avauspuheenvuoro seminaarissa *Kieli – notkea ja moninorminen* . 12.4.2014. Kieli-kampus. Jyväskylän yliopisto.

Rusanen & Räsänen (2011). Matematiikassa heikosti suoriutuvien lasten laskustrategioiden kehitys. Kasvatustieteiden laitos, erityispedagogiikka, Jyväskylän yliopisto. Pekka Räsänen, Niilo Mäki Instituutti, Jyväskylä elokuu 25, 2014 NMI Bulletin 3/2012

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1–36.

Sfard, A. (1994). Reification as the Birth of Metaphor. For the Learning of Mathematics, 14(1), 44–55.

Silfverberg, H. (1999). Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Tampereen yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Acta Universitatis Tamperensis 710.

Viiri, J. (2014) Seminaaripuheenvuoro *Puhutko fysiikkaa?* 12.4.2014. Kieli-Kampus. Jyväskylän yliopisto.